Devoir maison n$^{\text{o}}$ 4 : correction

Exercice 1. Une fonction définie à partir d'une intégrale (*d'après CCINP 2023*)

Partie I - Définition de la fonction

Q1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ? Calculer alors sa valeur en fonction de α.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est continue sur $]0\,;1]$.

On écrit, pour $t \in]0\,;1]$, $t^\alpha = \frac{1}{t^{-\alpha}}$. Alors, d'après le cours, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{-\alpha}}$ est convergente en 0 si et seulement si $-\alpha < 1$, *i.e.* $\boxed{\alpha > -1}$.

Dans ce cas, on pose $X > 0$. On a $\displaystyle\int_X^1 t^\alpha \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_X^1 = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{X^{\alpha+1}}{\alpha+1} \xrightarrow[X\to 0]{} \frac{1}{\alpha+1}$ car $\alpha + 1 > 0$.

En particulier $\boxed{\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}}$.

Q2. Un nombre réel x étant fixé, donner un équivalent (sous la forme d'une puissance de t), lorsque t tend vers 0^+, de la fonction définie sur $]0\,;1]$ par $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+t}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $1 + t \underset{0^+}{\sim} 1$, on a $\boxed{\dfrac{t^{x-1}}{1+t} \underset{0^+}{\sim} t^{x-1}}$.

Q3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+t}$ est continue sur $]0\,;1]$.

D'après **Q1**, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $x - 1 > -1$, *i.e.* $x > 0$. Grâce à la question précédente, on en déduit par équivalence de fonctions positives que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\boxed{x > 0}$.

On définit alors sur $]0\,;+\infty[$ la fonction f par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Partie II - Valeurs de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Q4. Montrer que $f(1) = \ln(2)$, puis que $f(2) = 1 - \ln(2)$. On pourra remarquer que, pour tout $t \in [0\,;1]$, $1 - \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{t}{1+t}$.

Comme on connaît les primitives (via l'indication pour la deuxième), on a directement :

- $f(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln|1+t|\Big]_0^1 = \boxed{\ln 2}$.
- $f(2) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \Big[t - \ln|1+t|\Big]_0^1 = \boxed{1 - \ln 2}$.

Q5. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 2$: $f(n) = (-1)^{n-1}\ln(2) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{1}{k+1}$. Écrire une fonction python d'entête `def f_entier(n):` qui calcule $f(n)$ à partir de cette formule et renvoie la valeur de $f(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
On importera la fonction `log` (pour ln) de la bibliothèque `numpy`.

C'est un classique algorithme de somme.

```python
from numpy import log

def f_entier(n):
    total = (-1)**(n-1) * log(2)
    for k in range(n-1):
        total = total + (-1)**n * (-1)**k / (k+1)
    return total
```

Partie III - Limite de f en 0

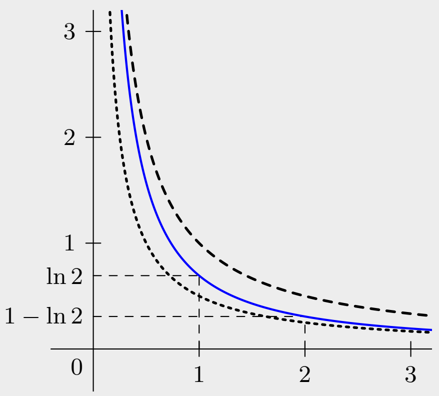
Q6. Montrer que, pour tout $x > 0$ et $t \in \,]0\,;1]$: $\frac{t^{x-1}}{2} \leqslant \frac{t^{x-1}}{1+t} \leqslant t^{x-1}$.
En déduire que, pour $x > 0$: $\frac{1}{2x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

Soient $x > 0$ et $t \in \,]0\,;1]$. Comme $0 \leqslant t \leqslant 1$, on a $1 \leqslant 1+t \leqslant 2$ puis en passant à l'inverse $1 \geqslant \frac{1}{1+t} \geqslant \frac{1}{2}$. En multipliant par $t^{x-1} > 0$, on obtient $\boxed{t^{x-1} \geqslant \frac{t^{x-1}}{1+t} \geqslant \frac{t^{x-1}}{2}}$. Alors, par croissance de l'intégrale (elles sont toutes les deux convergentes), on obtient $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
Au milieu on reconnaît $f(x)$. Pour les deux autres, on applique **Q1** avec $\alpha = x-1 > -1$ (car $x > 0$) et on obtient $\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x-1+1} = \frac{1}{x}$. D'où comme attendu $\boxed{\frac{1}{2x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}}$.

Q7. En déduire la limite de f en $+\infty$ ainsi que la limite de f en 0.

- Comme $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2x} = +\infty$, par comparaison $\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty}$.
- Comme $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$.

Q8. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On placera en particulier les points de cette courbe d'abscisses 1 et 2 (on donne $\ln(2) \approx 0{,}7$).



Ci-contre :

- en pointillés la courbe représentative de $x \mapsto \frac{1}{2x}$,
- en tirets longs la courbe représentative de $x \mapsto \frac{1}{x}$,
- en trait plein la courbe représentative de f.

De plus on a représenté les valeurs

$$f(1) = \ln 2 \approx 0{,}7 \quad \text{et} \quad f(2) = 1 - \ln 2 \approx 0{,}3$$

obtenues en **Q4**.

Partie IV - Équivalent de f en $+\infty$

Q9. Montrer que, pour $x \in]0\,;+\infty[$, $f(x)+f(x+1)=\dfrac{1}{x}$.

Soit $x>0$. On a aussi $x+1>0$ donc, d'après **Q3**, $f(x)$ et $f(x+1)$ sont bien définis. Par linéarité de l'intégrale

$$f(x)+f(x+1)=\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t+\int_0^1 \frac{t^{x}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 \frac{t^{x-1}\cancel{(1+t)}}{\cancel{1+t}}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t \overset{\mathbf{Q6}}{=} \boxed{\frac{1}{x}}.$$

Q10. On admet que f est décroissante sur $]0\,;+\infty[$. Montrer que, pour $x>1$:

$$f(x+1)+f(x)\leqslant 2f(x)\leqslant f(x)+f(x-1).$$

Soit $x>1$. Comme f est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, on a $f(x+1)\leqslant f(x)\leqslant f(x-1)$. En ajoutant $f(x)$, on obtient $\boxed{f(x+1)+f(x)\leqslant 2f(x)\leqslant f(x)+f(x-1)}$.

Q11. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Pour $x>1$, on a $x-1>0$. Alors, d'après les deux questions précédentes, $\dfrac{1}{x}\leqslant 2f(x)\leqslant \dfrac{1}{x-1}$. En multipliant par $x>0$, on obtient $1\leqslant 2xf(x)\leqslant \dfrac{x}{x-1}$.
Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=1$. Ainsi d'après le théorème des gendarmes $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}2xf(x)=1$, ce qui se réécrit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{1/2x}=1$, c'est la définition de $\boxed{f(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2x}}$.

Exercice 2. [Facultatif]

Partie A - Une formule pour $f(n)$

Q12. Rappeler la formule de factorisation de a^n-b^n, pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $n\in\mathbb{N}^*$.
En déduire que, pour $t\in[0\,;1]$, $n\in\mathbb{N}^*$: $1-(-t)^n=(1+t)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k$.

D'après le cours de première année, pour tous $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\boxed{a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}b^k}.$$

En appliquant cette égalité avec $a=1$ et $b=-t$, on obtient

$$1-(-t)^n=1^n-(-t)^n=(1-(-t))\sum_{k=0}^{n-1}1^{n-1-k}(-t)^k=\boxed{(1+t)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k}.$$

Remarque : si on ne se rappelle pas de la formule de factorisation, on peut retrouver cette dernière égalité en développant le membre de droite et en remarquant qu'il y a télescopage.

Q13. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$: $f(n) = (-1)^{n-1}\ln(2) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{1}{k+1}$. On pourra remarquer que, pour $n \geqslant 2$ et $t \in [0\,;1]$: $t^{n-1} = (-1)^{n-1}(-t)^{n-1}$.

D'après la question précédente prise en $n-1$, pour tout $t \in [0\,;1]$, on a $1-(-t)^{n-1} = (1+t)\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k t^k$.
Cela se réorganise en $\frac{(-t)^{n-1}}{1+t} = \frac{1}{1+t} - \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k t^k$. Alors, en commençant par l'indication fournie :

$$\begin{aligned}
f(n) = \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t &= (-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{(-t)^{n-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&\quad \textit{relation ci-dessus} \\
&= (-1)^{n-1}\int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k t^k\right)\mathrm{d}t \\
&\quad \textit{linéarité intégrale} \\
&= (-1)^{n-1} f(1) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t \\
&\quad \textit{\textbf{Q4} et \textbf{Q1}} \\
&= \boxed{(-1)^{n-1}\ln 2 + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \frac{1}{k+1}}
\end{aligned}$$

Partie B - Variations de f

Q14. Rappeler la définition de la décroissance d'une fonction g définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Par définition, une fonction g est décroissante sur un intervalle I si pour tout $(x,y) \in I^2$ tel que $x \leqslant y$ alors $g(x) \geqslant g(y)$.

Q15. Soit α et β deux nombres réels tels que $-1 < \alpha \leqslant \beta$. Comparer, pour $t \in \,]0\,;1]$, t^α et t^β.
En déduire que f est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

Soient $-1 < \alpha \leqslant \beta$ et $t \in \,]0\,;1]$.

$$\begin{aligned}
&\alpha \leqslant \beta \\
&\quad \ln t \leqslant 0 \ \textit{car } t \leqslant 1 \\
&\alpha \ln t \geqslant \beta \ln t \\
&\quad \exp\ \textit{croissante} \\
&\mathrm{e}^{\alpha \ln t} \geqslant \mathrm{e}^{\beta \ln t} \\
&\quad \textit{par définition } a^b = \mathrm{e}^{b \ln a} \\
&t^\alpha \geqslant t^\beta
\end{aligned}$$

Soient maintenant $0 < x \leqslant y$. Via ce qui précède avec $\alpha = x-1 > -1$ et $\beta = y-1$, on a :

$$\begin{aligned}
&t^{x-1} \geqslant t^{y-1} \\
&\quad 1+t > 0 \\
&\frac{t^{x-1}}{1+t} \geqslant \frac{t^{y-1}}{1+t} \\
&\quad \textit{croissance de l'intégrale} \\
&\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \frac{t^{y-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&\quad \textit{définition de } f \textit{ et intégrales convergentes par } \textbf{\textit{Q3}} \\
&f(x) \geqslant f(y).
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question précédente, $\boxed{f \text{ est décroissante sur }]0\,;+\infty[}$.